

## El Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores: Nuevas perspectivas y horizontes para la formación docente

Walter F. Castro; Luis Roberto Pino-Fan; Yoselyn Parra-Urrea

walter.castro@udea.edu.co; luis.pino@ulagos.cl; yocelynparra@gmail.com

Universidad de Antioquia, Colombia; Universidad de Los Lagos, Chile; Universidad de San Sebastián (Profesora) y Estudiante de Doctorado en Ed. Matemática de la Universidad de Los Lagos

### Resumen:

El análisis y reflexión del conocimiento requerido por los profesores de matemática para lograr una enseñanza efectiva es una de las problemáticas de interés en la educación matemática. El propósito de este documento es caracterizar los conocimientos de los profesores necesarios para gestionar idóneamente los aprendizajes de objetos matemáticos específicos. Para ello, presentamos las nociones teóricas del modelo del Conocimiento Didáctico Matemático -CDM-. Este modelo interpreta y describe el conocimiento del profesor a partir de tres dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica, dimensión meta didáctico-matemática. El modelo del CDM aporta un sistema de categorías y subcategorías del conocimiento que el profesor debe conocer, comprender, saber aplicar y valorar. Además, permite el análisis detallado de las prácticas docentes mediante herramientas sustentadas en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS).

### Palabras clave:

*Formación del profesor, conocimiento, conocimiento didáctico matemático, enfoque ontosemiótico, educación matemática.*

### Abstract:

The analysis and reflection about the knowledge required by mathematics teachers to achieve effective teaching is an interesting problem in mathematics education. The purpose of this document is to characterize the required knowledge for teachers to manage the learning of specific mathematical objects properly. We present the theoretical notions of the mathematical didactic knowledge model -CDM-. This model interprets and describes the teacher's knowledge based on three dimensions: the mathematical dimension, didactic dimension, meta-didactic-mathematical dimension. The CDM model is a system of categories and subcategories of knowledge that the teacher must know, understand, know how to apply and assess. Besides, it allows a detailed analysis of the practices through the use of tools based on the Approach, Knowledge and Mathematical Instruction (EOS).

### Key words

*Teacher education, knowledge, didactic-mathematic knowledge, ontosemiotic approach mathematics education*

### Resumo:

A análise e reflexão sobre o conhecimento requerido pelos professores de matemática para conseguir um ensino efetivo é uma das problemáticas de interesse da educação matemática. O objetivo deste documento é caracterizar os conhecimentos necessário para que os professores gerenciem idoneamente os aprendizados de objetos matemáticos específicos. Para isto, apresentamos as noções teóricas do modelo de Conhecimento Didático Matemático -CDM-. Este modelo interpreta e descreve o conhecimento do professor com base em três dimensões: a dimensão matemática, a dimensão didática, a dimensão meta-didático-matemática. O modelo CDM contribui com um sistema de categorias e subcategorias de conhecimento que o professor deve conhecer, entender, saber aplicar e avaliar. Além disso, possibilita uma análise detalhada das práticas docentes através do uso de ferramentas legitimadas pela Abordagem Ontosemiótica do Conhecimento e Instrução Matemática (EOS).

### Palavras-chave

*Formação de professores, conhecimento, conhecimento didático-matemático, abordagem onto-semiótica, educação matemática*

## 1 Introducción

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores representa un campo de investigación fundamental. “La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los estudiantes depende de manera esencial de la formación de sus profesores” (Pino, 2014, p.5). Por más de treinta años, la comunidad de educadores matemáticos ha estado interesada en describir, analizar y determinar el conocimiento requerido por los profesores de matemática para lograr procesos de enseñanza que garanticen el aprendizaje de sus estudiantes.

La tendencia e interés por el estudio de la formación y el conocimiento del profesor, se evidencia en los grupos de discusión que se sostiene en los congresos más importantes de educación matemática. La conferencia anual del Grupo Internacional de Psicología de la Educación de las Matemáticas (PME); el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME); el Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática (CERME); la conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM); entre otros, y las publicaciones de libros y revistas especializadas tales como el *Journal of Mathematics Teacher Education*.

Los trabajos de Shulman (1986); Grossman (1990); Ball (2000); Ball, Lubienski y Mewborn (2001); Hill, Ball y Schilling (2008); Mishra y Koehler (2006), se consideran propuestas de caracterización de las diversas componentes que constituyen el conocimiento que un profesor debe tener para enseñar eficientemente. Algunos investigadores tales como Fennema y Franke (1992), Llinares y Krainer (2006) Ponte y Chapman (2006), Philipp (2007), Sowder (2007), y Sullivan y Wood (2008) han propuesto diferentes maneras de concebir el conocimiento requerido para la enseñanza, así como diversas formas de construirlo. Aun cuando numerosos estudios se han interesado por dar respuestas a la problemática referida a la formación y el conocimiento requerido por el profesor de matemática, Rowland y Ruthven (2011) señalan que no hay un consenso sobre el marco teórico que permita describir detalladamente el conocimiento del profesor.

## 2 Estado de la literatura

Uno de los primeros autores interesados en exa-

minar las complejidades de la comprensión y transmisión del conocimiento del contenido por parte de los docentes fue Shulman (1986) quien propuso inicialmente tres categorías para el conocimiento del profesor: *conocimiento del contenido*; *conocimiento pedagógico del contenido*, y *conocimiento curricular*. Posteriormente, Shulman (1987) extiende sus ideas y propone siete aspectos para determinar el conocimiento del profesor: *conocimiento del contenido*; *conocimiento pedagógico general*; *conocimiento curricular*; *conocimiento del contenido pedagógico*; *conocimiento de los estudiantes y sus características*; *conocimiento de contextos educativos y el conocimiento de fines, propósitos y valores educativos, y sus fundamentos filosóficos e históricos*. Estos siete aspectos son denominados por Shulman como *Categorías del Conocimiento Base*.

Por su parte Grossman (1990) citado en Pino-Fan (2014) se apoya en los trabajos desarrollados por Shulman sobre las categorías del conocimiento base y reestructura dichas ideas mediante el *Modelo del conocimiento del profesor*. Grossman considera esencial en la formación del profesor cuatro elementos que permiten alcanzar mayor competencia disciplinar: *Conocimiento pedagógico general*; *Conocimiento del contenido*; *Conocimiento pedagógico del contenido*; y *Conocimiento del contexto*.

Por mucho tiempo la investigación se ha centrado en estudiar aspectos vinculados con la preparación del contenido que necesitan los profesores para enseñar, esto en lugar de indagar sobre el tipo de contenido que necesitan aprender. Las ideas propuestas por Shulman han tenido gran impacto en la comunidad de investigación, al enfatizar la importancia del conocimiento del contenido en la enseñanza, y en particular el conocimiento pedagógico del contenido (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Ball y colaboradores proponen el modelo del *Conocimiento matemático para la enseñanza*. Este modelo refiere al conocimiento matemático que los profesores necesitan para llevar a cabo los procesos de enseñanza-aprendizaje. El *Conocimiento matemático para la enseñanza* propone un refinamiento de las categorías planteadas por Shulman, particularmente sugiere que la categoría del *Conocimiento del contenido* puede subdividirse en: *conocimiento de contenido común*, *conocimiento de contenido especializado* y *conocimiento en el horizonte matemático*. Asimismo, la categoría del *conocimiento pedagógico del contenido* está



conformada por: el *conocimiento de contenido y los estudiantes, conocimiento de contenido y la enseñanza, y conocimiento curricular* (Hill, Ball y Schilling, 2008).

En la actualidad las tecnologías están presentes en el discurso educativo principalmente debido a la disponibilidad de nuevos recursos especialmente digitales que podrían facilitar el aprendizaje. Si bien Shulman no se refiere a la relación entre tecnología, pedagogía y contenido, Mishra y Koehler (2006) proponen un modelo que enfatiza las conexiones, interacciones, posibilidades y limitaciones entre el contenido, la pedagogía y la tecnología. Dicho modelo propone siete categorías del conocimiento del profesor: *conocimiento del contenido; conocimiento pedagógico; conocimiento pedagógico del contenido; conocimiento de la tecnología; conocimientos tecnológicos de contenidos; conocimiento pedagógico tecnológico; conocimientos del contenido pedagógico tecnológico.*

Según Llinares, Valls y Roig (2008) cuando los profesores en formación examinan los procedimientos usados por los estudiantes e indagan sobre la comprensión matemática adquirida por el aprendiz, pueden identificar y analizar aspectos requeridos en el proceso de instrucción para mejorar el aprendizaje de sus estudiantes. Esto sin duda, consigue que profesores en formación puedan ampliar su conocimiento respecto a la pertinencia de ciertos procesos de enseñanza y aprendizaje y con ello establecer estrategias compatibles para un determinado modelo de aprendizaje.

### 3 El modelo del conocimiento del profesor.

Estudios como los descritos anteriormente se han interesado por dar respuestas a la problemática referida a la formación docente. Sin embargo, Godino (2009) señala:

Los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática incluyen categorías muy generales. Consideramos que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Ello permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemáticas. (p.19)

Si bien algunos modelos del conocimiento del profesor propuestos en la literatura internacional lucen simples, esta simplicidad en su descripción inicial no favorece el análisis de las relaciones entre los diversos componentes.

El modelo del conocimiento del profesor tiene usos prácticos para el diseño de programas de formación inicial y formación continua, es decir, se requiere conocer criterios para medir el conocimiento del profesor según corresponda a cada categoría, adicionalmente se necesita conocer maneras efectivas para que los formadores de profesores y agencias estatales puedan ayudar a desarrollar los diversos componentes del modelo, así como establecer relaciones entre ellos.

En este documento presentamos un modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor (Pino-Fan y Godino, 2015) que surge como respuesta a la problemática anterior. Godino (2009) propone un sistema de categorías del conocimiento didáctico y matemático del profesor, que se relacionan con las herramientas de análisis descritas en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), particularmente se destacan dos tipos de herramientas: las *facetas* (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional) implicadas en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática y los *niveles de análisis* (prácticas matemáticas y didácticas, configuración ontosemiótica, normas e idoneidad). Diversos estudios (Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan y Godino, 2014; Pino-Fan, Godino y Font, 2015; Pino-Fan, Assis y Castro, 2015) se han interesado por refinar el sistema de categorías descrito inicialmente por Godino (2009), constituyendo así, el Modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) que interpreta y caracteriza el conocimiento del profesor a partir de tres dimensiones: *dimensión matemática, dimensión didáctica y la dimensión meta-didáctica* (Pino-Fan, Godino y Font, 2015).

Cada una de estas dimensiones considera subcategorías del conocimiento que, a su vez, incluyen herramientas teóricas y metodológicas que permiten la operativización del análisis del conocimiento de cada categoría. Más aún, estas dimensiones, con sus respectivas herramientas de análisis, se involucran en cada una de las fases propuestas para la elaboración del diseño instruccional: estudio preliminar, diseño,

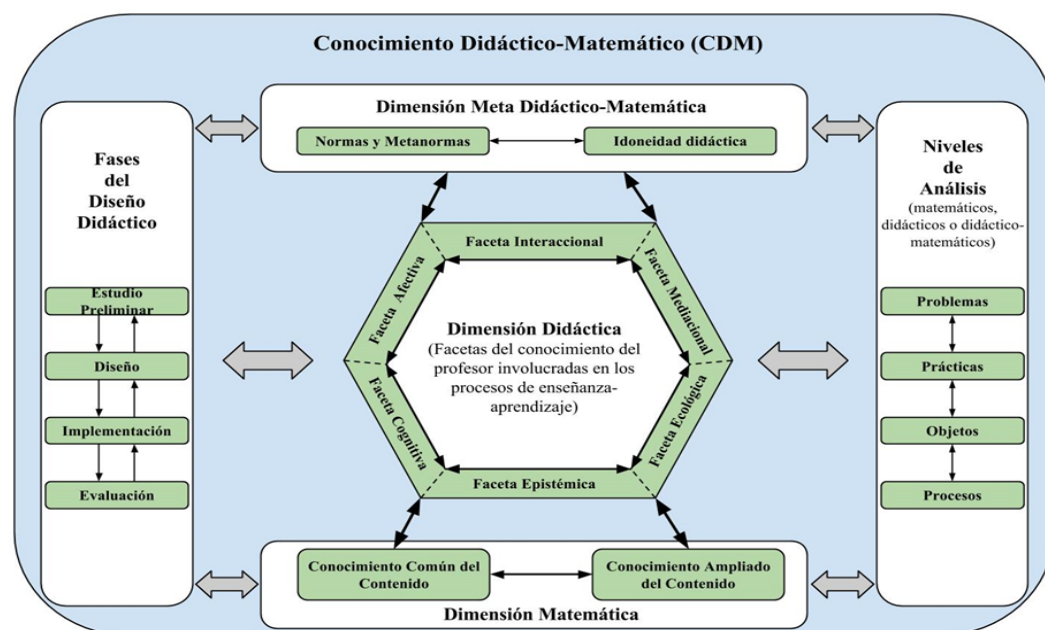


Figura 1: Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 103)

implementación y evaluación de los procesos de enseñanza-aprendizaje (Figura 1).

A continuación, se definen cada una de las tres dimensiones: matemática; meta didáctico-matemática; y didáctica. Posteriormente se explicitan los niveles y herramientas de análisis y finalmente se describen las fases del diseño didáctico.

### 3.1 Dimensión Matemática:

La dimensión matemática del CDM, permite al profesor resolver tareas matemáticas propuestas en los procesos de instrucción y relacionar objetos matemáticos cuya enseñanza se afronta en distintos niveles educativos. Esta dimensión está compuesta por dos tipos de conocimiento matemático de naturaleza diferente pero íntimamente vinculados: El *Conocimiento común del contenido* es el conocimiento específico del objeto matemático, que admite al docente resolver los problemas y tareas propuestos en el currículo matemático. Por su parte el *Conocimiento ampliado del contenido* refiere al conocimiento que el profesor debe poseer sobre los vínculos entre los objetos matemáticos presentes y los que se estudiarán posteriormente en el currículo de matemática (Pino-Fan y Godino, 2015).

De acuerdo con Pino-Fan y Godino (2015), estas dos subcategorías que incluyen la dimensión matemática del CDM, son reinterpretaciones del conocimiento común del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008; Ball, Thames y Phelps, 2008) y del horizonte matemático (Ball y Bass, 2009), respectivamente.

Luego la dimensión matemática no refiere únicamente al conocimiento para resolver problemas específicos, sino también al conocimiento matemático que permite vincular diversos objetos matemáticos propuestos a lo largo del currículo escolar. La relación entre nociones matemáticas específicas, su aparición curricular y la profundización de cada tarea matemática en virtud del nivel educativo están incluidos en esta dimensión.

### 3.2 Dimensión Meta Didáctico-Matemática.

El profesor de matemáticas en posesión del conocimiento matemático puede afrontar la labor de enseñar matemáticas. Sin embargo, el conocimiento matemático no es suficiente para propiciar procesos de enseñanza y aprendizaje idóneos. Es decir, es fundamental conocer tanto el contexto de la institución educativa como el entorno social y cultural de los estudiantes. Existen normas sociales de carácter institucional reguladas por normativas legales que determinan la gestión de clase del profesor, y existen mecanismos que valoran si la idoneidad del proceso de instrucción satisface las expectativas de los estudiantes de la institución y de la sociedad. El trabajo del profesor no solo se ve regulado por el conocimiento matemático, sino por las condiciones institucionales, por las normas y metanormas establecidas, que regulan su ejercicio profesional orientado a formar matemática e integralmente a los estudiantes.



El desempeño del profesor se medirá por el desempeño de los estudiantes, con lo que se valora su ejercicio profesional.

### 3.3 Dimensión Didáctica.

La dimensión didáctica incluye seis subcategorías del conocimiento: faceta interaccional, faceta mediacional, faceta afectiva, faceta cognitiva, faceta epistémica y faceta ecológica. Estas seis subcategorías se regulan por normas y meta-normas que contribuyen en alcanzar la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Cada una de estas seis facetas da cuenta de aspectos esenciales en la labor del profesor en tanto que enseña. La secuencia de su aparición en un proceso de enseñanza depende cada vez de escogencias personales del docente. La elección de una tarea puede obedecer a un asunto del contexto sociocultural (faceta ecológica) de la institución educativa, o bien para motivar (faceta afectiva) a los estudiantes. Asimismo, el profesor debe determinar qué medios o recursos (faceta mediacional) potencian los aprendizajes de sus estudiantes y establecer qué actividades favorecen la interacción en el aula (faceta interaccional), todo esto teniendo en cuenta las características de los objetos matemáticos involucrados (faceta epistémica) y el desarrollo cognitivo de los estudiantes (faceta cognitiva) (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015). Se aprecia que estas acciones, conscientes o inconscientes están presentes en la labor del profesor. Su reconocimiento y las relaciones entre ellas ayudan a definir la idoneidad didáctica del proceso de estudio. La idoneidad didáctica se puede concebir como una suma directa de las idoneidades de cada una de las facetas, que aportan individualmente al proceso de estudio.

Las seis facetas de la dimensión didáctica del conocimiento didáctico matemático pueden contemplarse para examinar, describir y caracterizar el conocimiento de los profesores en cualquier fase del proceso de enseñanza: estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación (Pino-Fan y Godino, 2015).

### 3.4 Los Niveles de Análisis

El CDM propone para cada una de las facetas, cuatro niveles de análisis que permiten un estudio detallado del conocimiento didáctico matemático del

profesor dependiendo del tipo de información requerida para la toma de decisiones en los procesos de instrucción (Pino-Fan, Font y Godino, 2013).

Estos niveles admiten: a) Identificar las características de las tareas o de las secuencias de tareas que los profesores proponen. Además de describir las prácticas didácticas o matemáticas que tanto el profesor como los estudiantes deben desarrollar en función de la solución de las tareas propuestas (Nivel: Prácticas matemáticas y didácticas); b) Identificar y describir sistemáticamente los objetos didáctico-matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones; proposiciones/propiedades; procedimientos y argumentos) y sus significados emergentes de tareas o secuencias de tareas, presentes en el desarrollo de tales prácticas. Asimismo, se indaga sobre los procesos que los profesores y estudiantes desarrollan, y que conducen a la emergencia de objetos matemáticos (Nivel: Configuraciones de objetos y procesos) (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015); c) Identificación de las reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (Pino-Fan, Font y Godino, 2013) (Nivel: Normas y Metanormas); y d) Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica (Pino-Fan, et al., 2013) (Nivel: Idoneidad didáctica).

Godino, Rivas, Castro y Konic (2008); Castro, Godino y Rivas (2011) proponen una herramienta de análisis epistémico vinculado con la "Identificación y descripción sistemática de los objetos didáctico-matemáticos (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones; proposiciones/propiedades; procedimientos y argumentos) y sus significados correspondientes". Este análisis epistémico tiene tres objetivos: El primero, explorar objetos y significados puestos en juego en la solución de una tarea; el segundo, identificar posibles conflictos de significado y predecir dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los estudiantes otorgan dada una tarea, y el tercero, explorar cómo el uso de las entidades primarias (Godino, Batanero y Font, 2007) permite predecir e identificar conflictos potenciales. Esta herramienta favorece dar una mirada tanto a los elementos primarios de significado como a los conflictos que se ponen en juego en la solución de una tarea matemática y que se manifiestan durante la actividad generada con motivo de su solución.

El EOS asume la emergencia, con base en los sistemas de práctica, de dos niveles de objetos (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009); el primer nivel refiere a aquellas entidades que se pueden observar, por ejemplo, en libros de texto matemático (Elementos lingüísticos; Situaciones/Problemas; Conceptos/Definiciones; Propositiones/Propiedades; Procedimientos y Argumentos). A este conglomerado de objetos se le llama configuración de objetos primarios. Estas configuraciones pueden ser cognitivas (conglomerado de objetos personales) o epistémicas (conglomerado de objetos institucionales) según se considere la práctica desde la perspectiva personal o institucional. (Godino, Font, Wilhelmi, 2006). El segundo nivel se relaciona con la tipología de objetos que surge de las distintas maneras de ver, hablar, operar sobre los objetos del nivel anterior. Es decir, los objetos matemáticos según el juego de lenguaje en que participan pueden ser consideradas a partir de las siguientes dimensiones duales: Personal-Institucional; Ostensivo-No ostensivo; Expresión-Contenido; Extensivo-Intensivo; Unitario-Sistémico (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009, p.7-8). Estos dos niveles de objetos determinan la herramienta de análisis conocida como *Configuración Ontosemiótica* (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009).

En este mismo sentido, Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2009) proponen una herramienta para identificar y describir *normas y metanormas* que condicionan y soportan los procesos de estudio matemático. El EOS, adopta una perspectiva que integra el contrato didáctico, las normas sociales y matemáticas como parte de una 'dimensión normativa de los procesos de estudio'. Asimismo, se definen normas según la faceta del proceso de estudio (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) (Godino et al., 2009). Esto permite fijar la atención en normas que regulan: las matemáticas descritas en los currículos, la forma de transmisión de nociones y significados matemáticos, interacciones en el aula, uso de los recursos, procesos actitudinales de quienes intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje, la relación con el contexto institucional, social cultural en el que se desarrollan los procesos de instrucción.

Otra de las herramientas de análisis propuesta por Godino (2011) es la noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones y criterios, que representan un

recurso orientador para la gestión en el aula. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes: *Idoneidad epistémica, Idoneidad cognitiva, Idoneidad interaccional, Idoneidad mediacional, Idoneidad afectiva, Idoneidad ecológica*. Por su parte los criterios de idoneidad son reglas de corrección útiles en dos momentos de los procesos de estudio matemáticos. A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan la gestión de la clase. A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado (Breda y Lima, 2016).

### 3.5 Fases de Diseño Didáctico.

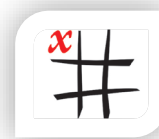
El diseño instruccional es una actividad cotidiana para el profesor, donde se involucran diversos aspectos: epistémicos, cognitivos, didácticos, curriculares. El proceso de diseño instruccional requiere que el profesor defina el tema, considere el contexto, adapte las tareas al desarrollo cognitivo de los estudiantes, proponga y desarrolle los objetivos, las estrategias de evaluación, de valoración y revisión del proceso.

Reigeluth (2000) define el diseño instruccional como "un cuerpo de conocimiento que dictamina acciones instruccionales para optimizar los resultados deseados, tales como el desempeño y el afecto" (p.5). Para Andrews y Goodson (1980), "la formulación de una estrategia instruccional que se adecúe al tema de estudio y a los requerimientos de los individuos es una parte integral de la mayoría de los modelos instruccionales" (p.5).

El modelo CDM propone cuatro fases de diseño didáctico: Estudio Preliminar; Diseño; Implementación y Evaluación.

El Estudio Preliminar permite al profesor comprender e identificar la diversidad de significados parciales que constituyen el significado holístico de un objeto matemático (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Conocer las diversas acepciones de una noción matemática permitirá disponer de mayor conocimiento para transitar por las diversas representaciones del objeto, tener herramientas que permita justificar y argumentar los mecanismos de resolución de una tarea, así como determinar eventuales conflictos de significado y maneras de abordarlos.

El diseño corresponde a la concretización del estudio preliminar, es decir, una vez identificada la trama de objetos matemáticos, sus significados y las



eventuales respuestas que pueden emerger de los sistemas de práctica. El diseño del proceso de enseñanza requiere considerar el desarrollo cognitivo de los estudiantes, los recursos o medios disponibles que potencien sus aprendizajes, así como la elaboración de actividades que permita la interacción en el aula, favoreciendo espacios de justificación y argumentación por parte de los estudiantes respecto a situaciones didácticas planteadas. En este mismo sentido, el docente debe establecer tareas que se ajusten al contexto social, cultural e institucional para despertar la curiosidad y motivación de los aprendices para dar respuesta a las tareas y actividades propuestas.

La implementación de la actividad en el salón de clase considera medios, interacciones, desarrollo cognitivo de los estudiantes y tiempo de duración. Finalmente se realiza la evaluación de la implementación, que considera críticamente la idoneidad de cada uno de los elementos vinculados en el desarrollo del proceso de estudio.

#### 4 Consideraciones finales

El CDM tiene vínculos con el modelo de Ball, así como con otros modelos que refieren al conocimiento del profesor. Sin embargo, el CDM ofrece herramientas para analizar la actividad de enseñanza y aprendizaje que los modelos de Ball y otros no proporcionan. Las diversas perspectivas del conocimiento del profesor brindan un panorama sobre las grandes áreas que componen el modelo del conocimiento del profesor, pero carecen de herramientas que permitan analizar los procesos instruccionales. En general, los trabajos desarrollados en torno a la problemática referida a la formación de profesores, no destacan las facetas mediacional y afectiva definidas por el CDM aun cuando éstas se involucran activamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y cuyo reconocimiento y problematización pueden ayudar al profesor a desempeñar mejor su trabajo docente en tanto que entiende la importancia de seleccionar los medios y recursos que potencien los aprendizajes de sus estudiantes, de igual manera, valora identificar los estados afectivos de los estudiantes durante el proceso de solución de tareas matemáticas.

El modelo del CDM propone dimensiones que otorgan una visión general del proceso de enseñanza y aprendizaje mediante categorías y subcategorías del conocimiento del profesor que ofrecen una buena

aproximación al panorama de desempeño profesional del docente, dado que reconoce la complejidad del acto educativo y proporciona herramientas de análisis para las diversas categorías de conocimiento.

Si bien una tendencia actual en la educación matemática ha sido caracterizar el conocimiento de los profesores para la enseñanza idónea de las matemáticas “la transferencia entre los resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas y la realidad del aula es en general muy lenta y a veces escasa” (Deulofeu, 2001, p.367).

La operativización de las dimensiones (Matemática, Didáctica y Meta Didáctica-Matemática) junto con las relaciones entre las *fases de diseño didáctico* y los *niveles de análisis* no solo establecen los diversos tipos de conocimiento requeridos por los profesores, sino que otorgan orientaciones y herramientas para diseñar y valorar el proceso de estudio. La evaluación del desempeño matemático de los estudiantes podría plantearse en relación con las *dimensiones del conocimiento* y con los *niveles de análisis* según sean manifestados y operativizados por los profesores.

Adicionalmente, el CDM reconoce con su *faceta ecológica*, el contexto social, cultural, político y económico que afecta a la escuela, y con su *faceta mediacional* que favorece afirmar que la idoneidad del proceso de estudio no depende únicamente del profesor. El entorno escolar con sus regulaciones y recursos humanos y económicos, tienen un efecto apreciable en la calidad de la educación que se ofrece a los estudiantes.

#### 5 Referencias Bibliográficas

- Andrews, D., & Goodson, L. A. (1980). A Comparative Analysis of Models of Instructional Design. *Journal of Instructional Development*, 3(4), 2-16.
- Assis, A., Godino, J. D. & Frade, C. (2012). As dimensões normativa e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 171-198.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper presented at the *43rd Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik Held* in Oldenburg, Germany.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th

- ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389 – 407.
- Breda, A., & Lima, V.M.R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, 5(1), 74-103.
- Castro, W. F., Godino, J. D. & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Revista Unión*, 3,73-88.
- Coll, C. & Sanchez, E. (2008). Presentación. El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de Educación*, 346, 15-32.
- Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? aportaciones de la investigación. *X JAEM*. Ponencia P41, 367-377.
- Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Categories of analysis of the mathematics teacher's knowledge]. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Reigeluth, C. M. (Ed.). (2000). *Diseño de la Instrucción: Teoría y Modelos: Un Nuevo Paradigma de la Teoría de la Instrucción*. Madrid: Editorial Santillana.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas [Indicators of didactical suitability of process of teaching and learning of mathematics]. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME)*. Recife, Brasil.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127 – 135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. En *ICME 11*. Morelia: ICME.
- Godino, J. D., & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3325-3326). Antalya, Turkey: CERME.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M., & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247-265.
- Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York and London: Teachers College Press.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Hill, H., & Ball, D. L. (2009). R and D: The curious - and crucial - case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan*, 91(2), 68-71.
- Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Mewborn, D. (2001). Teachers content knowledge, teacher education, and their effects on the preparation of elementary teachers in the United States. *Mathematics Education Research Journal*, 3, 28-36.
- Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), p.1017-1054.
- Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1-28.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento-didáctico matemático del profesor. [Extended perspective of didactic-mathematical knowledge of the teacher]. *PARADIGMA*, 36(1), 87-109.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada [Epistemic facet of didactic-mathematical knowledge of derivatives]. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte) [Design and application of an instrument for the exploration of future teachers' epistemic facet of didactic-mathematical knowledge of derivatives (part one)]. *REVEMAT*, 8(2), 1 – 49. doi: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n2p1>
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas [A proposal for the analysis of mathematical practices of future teachers about derivatives]. *BOLEMA*, 29(51), 60 – 89. doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a04>
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., & Castro, W. F. (2012). Key Epistemic Features of Mathematical Knowledge for Teaching the Derivative. In Tso, T.Y. (Ed). *Proceedings of the 36th Conference of the*





- International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297-304). Taipei, Taiwan: PME.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., & Castro, W. F. (2013). Prospective teacher's specialized content knowledge on derivative. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3195-3205). Antalya, Turkey: CERME.
- Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.
- Planas, N. & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(2), 179-213.
- Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, 85, 36-42.
- Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. Em I. Vale, T. Pimental, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarró (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (CD-ROM, 5-27). Lisboa, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Roig, A. I., & Llinares, S. (2008). Fases en la abstracción de patrones lineales [Phases of abstraction of linear patterns]. In: Luengo, R., Gómez, B., Camacho, M., & Blanco, L. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XII* (pp.195-204). Badajoz: SEIEM.
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.) (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching*. London: Springer.
- Schoenfeld, A., & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh, & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354) Rotterdam: Sense Publishers.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Souza, E. R., & Diniz, M. I. S. (1996). *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. 2ed. São Paulo: IME - USP.

Como citar este artículo:

Castro, W. F.; Pino-Fan, L. R.; Parra-Urrea, Y. (2018). El Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores: Nuevas perspectivas y horizontes para la formación docente. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*. 3 (2), 17-25.

Presentado: 15/abril/2018  
Aprobado: 30/noviembre/2018  
Publicado: 31/diciembre/2018

---

#### RECONOCIMIENTOS

---

Este artículo se ha escrito bajo el auspicio de los proyectos CODI-Acta 643-2012 (Universidad de Antioquia) y por la Comisión Nacional Científica y Tecnológica (CONICYT) de Chile, Proyecto FONDECYT 11150014.